

1, 2, 3, кодирај! – Активности циклуса 4 – Пројект (Практично интердисциплинарно подучавање) « Синтисајзер », Час 6(опционо): Конструкција скале

Доминантна дисциплина	Математика, музика
Резиме	Писање партитуре захтева креирање неке скале: ученици уочавају да су, при овом избору, вођени естетским, физиолошким и математичким факторима. Коришћењем неког програма сами прорачунавају фреквенције темперираних скала. Овај час је прилика да се ради алгоритмом.
Појмови	<p>Језици</p> <ul style="list-style-type: none">Нека скала је дефинисана тако да омогућује извјење само хармонијских звука. <p>Машине</p> <ul style="list-style-type: none">Компјутер је знатно ефикаснији од човека при одређивању фреквенције неке скале. <p>Алгоритми</p> <ul style="list-style-type: none">Алгоритам је метод који омогућује решавање неког проблема.Алгоритам може да садржи инструкције, петље, тестове, варијабле.
Материјал	<p>За одељење:</p> <ul style="list-style-type: none">Видеопројектор којим се пројектује Радни лист-Д05 <p>По пару:</p> <ul style="list-style-type: none">Компјутер с програмима Excel, Calc, etc.
Трајање:	Потребно је 3-4 часа

Увод

Овај час (концептуално комплексан је опцион јер није неопходан за наставак овог пројекта) ће вероватно користити ученицима који желе да генеришу своје сопствене звуке, или пак ако желе да продубе разлике између термина « *gamme tempérée* (темперирана скала) » и « *gamme pythagoricienne* (питагорејска скала) » с којим би могли да се суоче током претраге литературе или музичког продубљивања. Ако пак истражују само вредности фреквенције без намере да их мере неким реалним инструментом, онда наставник може да им подели [Радни лист-Д08](#).

Научна напомена:

Постоје бројни начини конструкције неке скале према одређеним естетским критеријумима. « Идеална » скала би требало да задовољи следећа три критеријума:

- Има ограничен скуп нота у некој октави (на пример енхармонијских нота $Do\# = Réb$) ;
- Гаранцију да су све терце и квинте тачне (тачан однос фреквенција нота комбинованих акордима размака 3 или 5 полустепена, респективно);
- Омогућује лаку превођење (множењем свих фреквенција скале с истим фактором, добија се друга такође хармонијска скала).

Према хармонијској природи музике, то није могуће. Дакле, потребно је направити избор.

- Час упознавања темпериране скале: према конструкцији (геометријски ред), она задовољава критеријум 3, садржи дванаест полустепена (критеријум 1).
- Прво продубљивање хроматске или питагорејске скале, која је најстарија а заснива се на итеративном односу квинте са квинтом. Са 4, 5, 7, 12 полустепена испуњен је критеријум 1; а итеративном конструкцијом се осигурава критеријум 3; постојање « *quinte du loup* », је супротно критеријуму 2.
- Коначно, друго продубљивање је посвећено природној скали (познатој и као *gamme zarlinienne*): поједностављено рачунање питагорејске скале нам омогућује да се ослободимо нежељених акорда (« *quinte du loup*»). Она ипак нарушава критеријуме 1 и 3, а ако желимо да је транспонујемо потребно је да се промени скала!

Полазна ситуација: које су фреквенције дванаест нота темпериране скале ?

Ученици су током Часа 4 забележили: *Нека скала је дефинирана тако да омогућује извођење хармонијских звука.*

Наставник математике то формулише на следећи начин: *Како је реализована дискретизација музичких нота?*

Наставник почиње са емитовањем три снимка звучне виљушке La_2 , La_3 et La_4 , а притом не наводи ни име инструмента, али наводи тачне вредности фреквенција: 220, 440 et 880 Hz, респективно. Пита одељење да ли се препознају ови звуци.

Одговори могу бити:

- То је звук звучне виљушке.
- Ноте су сличне, али су октаве мање или више ниске. Ученици с добрим слухом могу да препознају три ноте раздвојене с 2 октаве. Ученици с апсолутним слухом могу да идентификују три La сукцесивно.

Наставник потврђује да су у питању La2 (220 Hz), La3 (440 Hz) и La4 (880 Hz). Апсолутна фреквенција La3, 440 Hz, је дефинисана 1953 на Интернационалној конференцији у Лондону. La2 је нижа а La4 виша октава.

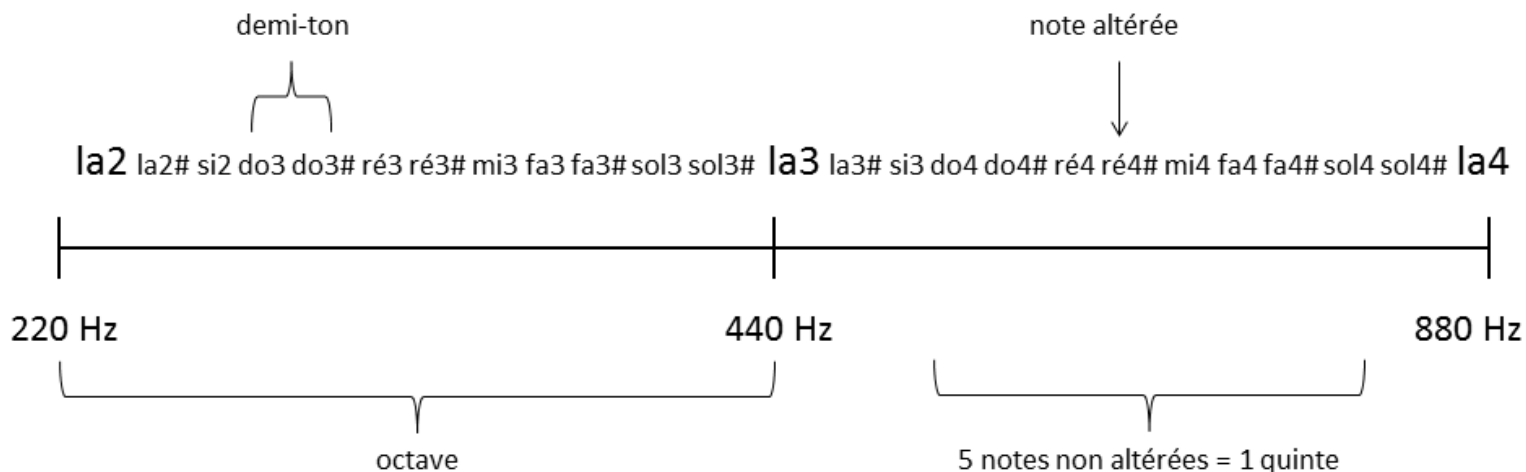
Педагошка напомена:

Приказ ове ситуације може да се реализује на мноштво начина:

- коришћењем генератора функције и звучника;
- коришћењем генератора звука у програму Audacity (види [Час 2](#));
- коришћењем пијанина и мерењем фреквенције три La помоћу акордера.

Можемо поћи и од три друге ноте раздвојене с две октаве.

Наставник пита ученике шта попуњава октава. Очекивани одговор је дванаест различитих нота (Do – Do# ou Réb – Ré – Ré# ou Mib – Mi – Fa – Fa# ou Solb – Sol – Sol# ou Lab – La – La# ou Sib – Si). Наставник на табли, постепено, комплетира следећу шему:



Дефинише или поново дефинише термине *октава*, *квинта*, *полустепен*, *алтерација* (црне дирке на пијанину полазећи од Do). Додаје специфичну дефиницију, која ће представљати ограничење будућег прорачуна: « две ноте раздвојене октавом имају однос фреквенција 2 на некој скали ».

Научна напомена:

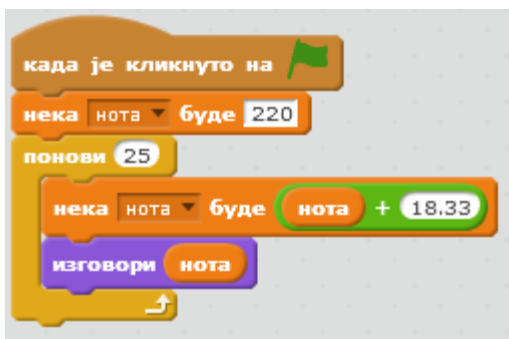
На овом графу опажемо само промењене ноте са повисилицом # (и не у bémol *b*) јер ћемо их конструисати растућом фреквенцијом (« quintes ascendantes »).

Натавник затим пита: *како дефинисати фреквенције 11 интермедијарних нота? У темперираној скали*, сви полустепени морају бити « *tempérament égal* », тј., равномерно распоређене.
Ево и другог ограничења (комплетирање дефиниције октаве) написаног на табли: « *12 равномерно распоређених нота* ».

Наставни предлаже: *употребите неки програм за рачунање фреквенција 22 ноте*. Неопходно понављање при сваком рачунању фреквенција указује на важност употребе компјутера. Ученици би, међутим, за интелигентну употребу компјутера требало да објасне метод и алгоритам који ће корсити при решавању овог проблема.

Први покушај: аритметички низ

Прва идеја ученика је да поделе октаву: $(440-220)/12 = 18,33$. Значи, да би полустепени били еквиливантни потребно је да буду раздвојени са 18,33 Hz.
Њихов алгоритам, ако би га програмирали у *Scratch*-у, би био сличан овом:



Нађене фреквенције за 25 полустепена су означене у табели. Тринаест фреквенција од La2 до La3 су равномерно распоређене између 220 и 440 Hz.
Проблем се појављује при покушају екстраполације овог аритметичког закона, са +18,33 Hz, између октаве La3 и La4 : јер је фреквенција La4 660 Hz уместо да буде 880Hz !

Научна напомена:

- Аритметичким резоновањем се може добити и +36,66 Hz ако су се ученици одлучили за другу октаву, или +27,50 Hz ако су се одлучили за обе октаве заједно. У првом случају не налазе 220Hz од La2, а у другом не налазе 440Hz од La3.
- Неопходно је да се дефинише рекурентни низ. Једноставно објашњење је да морамо наћи вредност која ће омогућити да нађемо следеће чланове низа (било сабирањем, у случају

Note	Fréquence (Hz)
La2	220,000
La#2	238,333
Si2	256,667
Do3	275,000
Do#3	293,333
Ré3	311,667
Ré#3	330,000
Mi3	348,333
Fa3	366,667
Fa#3	385,000
Sol3	403,333
Sol#3	421,667
La3	440,000
La#3	458,333
Si3	476,667
Do4	495,000
Do#4	513,333
Ré4	531,667
Ré#4	550,000
Mi4	568,333
Fa4	586,667
Fa#4	605,000
Sol4	623,333
Sol#4	641,667
La4	660,000

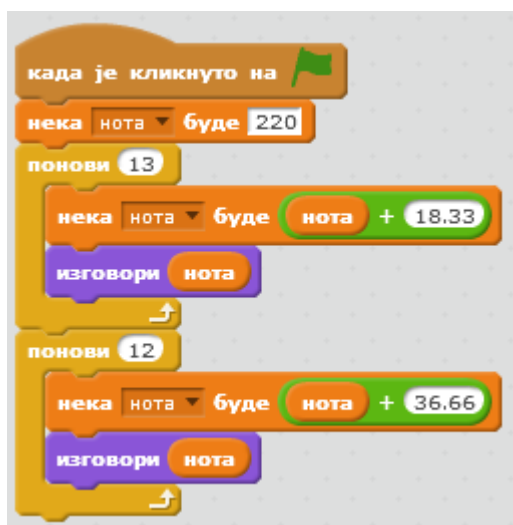
Аритметички низ

аритметичког низа, било множењем услучају геометријског низа).

Други покушај: аритметички низ с променљивом међусобном разликом

Ученици уочавају проблем, или им наставник то указује, и покушавају да комбинују више решења. Ако су фреквенције нота друге октаве двоструко веће него код прве, зашто онда не би удвостручили међусобну разлику после La3 ? Од 220 до 440 Hz, разлика ће бити 18,33 Hz а 36,66 Hz од 440 до 880 Hz.

Њихов алгоритам тад постаје:



У табели су добијене фреквенције.

Проблем је само наизглед решен. Јер, наставник може да пита да ли је подела регуларна. Каква је ситуација с октавом од Do3 до Do4? Види се да није регуларна, јер су интервали променљиви. Скале, применом овог метода, неће бити исте ако рачунање почињемо од неког Sol, неког Do или било које друге почетне референце.

Научна напомена:

Неке скале (као природна скала), историјски посматрано, су експлицитно дефинисане полазећи од неке ноте. Превођење је врло проблематична, али мелодија има неку боју. На пример,

Note	Fréquence (Hz)
La2	220,000
La#2	238,333
Si2	256,667
Do3	275,000
Do#3	293,333
Ré3	311,667
Ré#3	330,000
Mi3	348,333
Fa3	366,667
Fa#3	385,000
Sol3	403,333
Sol#3	421,667
La3	440,000
La#3	476,667
Si3	513,333
Do4	550,000
Do#4	586,667
Ré4	623,333
Ré#4	660,000
Mi4	696,667
Fa4	733,333
Fa#4	770,000
Sol4	806,667
Sol#4	843,333
La4	880,000

Аритметички низ с променљивом међусобном разликом

le *Concerto pour clarinette en La* de Wolfgang Amadeus Mozart је био конципиран за извођење на скали дефинисаној у односу на La. *A contrario*, темперирана скала је била дизајнирана да олакша сваку транспозицију (попут промена тоналитета током извођења).

Заједничко представљање

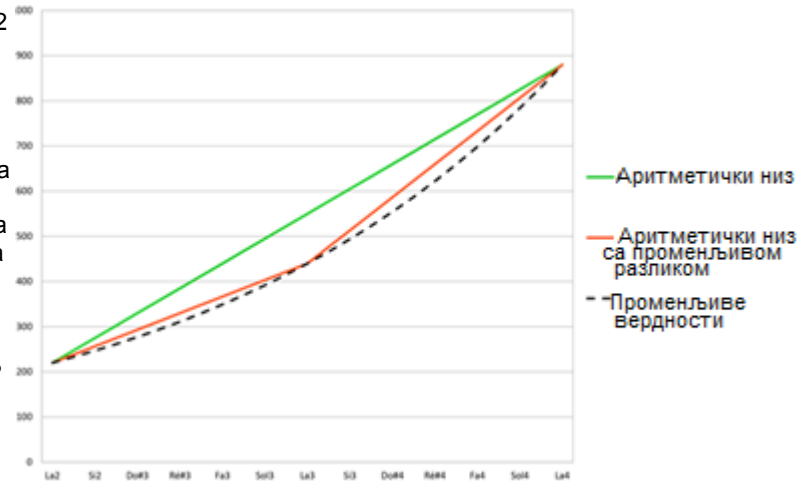
Наставник пројектује на екрану [Радни лист-Д05](#) и тражи од ученика да нацртају (на својим екранима), криве које одговарају фреквенцијама које су прорачунали.

Ученици запажају да добијена крива није права, а ни сукцесија 2 сегмента праве. Покушај с променљивом аритметичком разликом је ближи реалној ситуацији али не функционише у пракси.

Наставник указује на две некохерентности у примењеном резонувању: дефиниција октаве подразумева мултипликацију са 2, а предложена подела подразумева сабирања. Да ли би можда могли да поделимо октаву мултипликативним факторима и применимо од полустепена до плустепена? Имајући на уму да је увек на крају октаве фреквенција последње ноте једнака двострукој вредности фреквенције њеног доњег *хармоника*?

Преформулисано питање: *који број, множењем самим собом 12 пута, даје 2?*

Ученицима није познат « квадратни корен из дванаест », користе нови лист да би прорачунали коефицијент(покушавају насумично с мање или више вештине) и добијају фреквенције 25 нота.



Трећи покушај: наћи количник геометријског низа пробањем свих могућности « brute-force attack » (заједнички)

Наставник објашњава да је број који тражимо између 1 и 2. Предлаже ученицима да прво нађу све могуће вредности између 1 и 2, међутим, између 1 и 2 има бесконачно много вредности, па је зато потребно да се « дискретизује порстор који истражујемо » позивајући се на аритметичку прецизност. Радећи овако ученици се уверавају да је потребно наћи неки други метод који се разликује од навођења свих могућих вредности (« brute-force attack ») између 1 и 2 [Метод « brute-force attack » се позива на алгоритам који се састји у тестирању свих могућности, без употребе неке специјалне вештине. Понекад је тај метод и једини могућ!]

Наставник прво предлаже ученицима да нађу прецизно колико има вредности с прецизношћу « до 1 цифре после запете ». Има 10 могућности: 1,0 ; 1,1 ; 1,2 ... 1,9 (то уопште није тешко и могу да то тестирају уобичајеним рачуном).

Сад би требало то исто да релаизују али са прецизношћу од 2 цифре после запете, требало би да тестирају 100 могућих вредности (1,00 ; 1,01 ; 1,02 ; 1,03... 1,99). Већ за 3 цифре после запете би требало да тестирају 1 000 покушаја (што би за обично рачунање било врло заморно). За 5 цифара после запете би им требало 100 000 покушаја, што је већ немогуће урадити ручно.

Одељење долази до закључка да је « **brute-force attack** » лош начин решавања овог проблема.

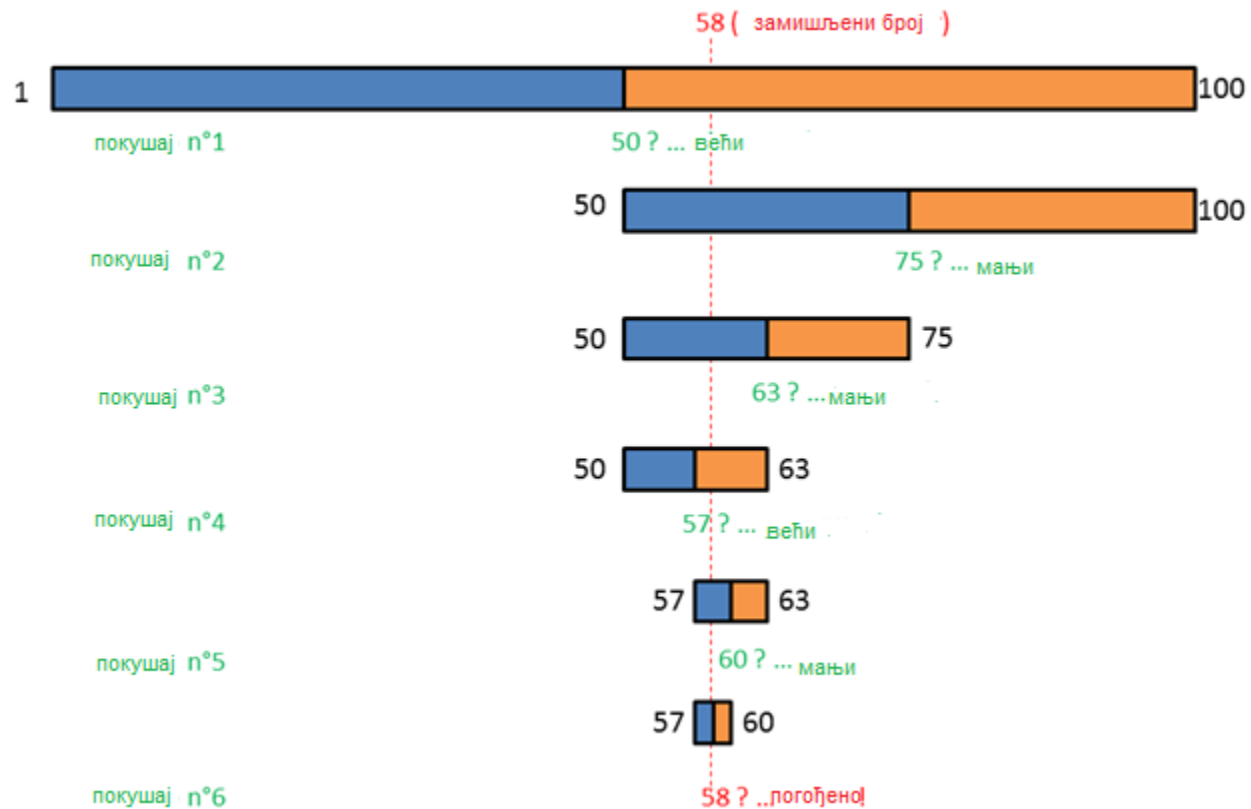
Увод у дихотомију (по провима, затим колективно)

Ако ученици не знају шта је дихотомија (што је врло вероватно), наставник може да да неку малу игру која ће их водити ка објашњењу стратегије коју означава овај појам.

Ученици играју у пару игру « откриче неког броја између 1 и 10 ». Један ученик замишља први број, између 1 и 10; а други би требало да открије замишљени број у што мањем броју покушаја. Први ученик (онај који зна тај број) само може да одговори са « мањи », « већи » или « погођено ». Наставник бележи број покушаја код сваког пара за откриће непознатог броја (медијана би требало да буде између 3 или 4).

Ученици објашњавају који су метод користили да би погодили тај број у што мање покушаја, а закључак је да су сви користили исту стратегију. Наводећи у првом покушају средњи број интервала, могли су да сазнају да ли је непознати број мањи или већи од те вредности. На тај начин је могући скуп бројева подељен на два дела. Затим наставља на исти начин, делећи сваки пут тај интервал на два дела. Ово је принцип дихотомије.

Наставник помаже ученицима цртајући, на табли, постепену реализацију овог процеса, што би графички изгледало, на пример, овако:



Затим одељење поново почиње, али сад за број између 1 и 100 (медијана броја покушаја би требало да буде 7); између 1 и 1 000 (10 покушаја); и коначно између 1 и 100 000 (17 покушаја).

Одељење сад пореди број покушаја применом « **brute-force attack** »- налажењем свих могућих комбинација, и применом дихотомије:

Откри борј између 1 и ...	Број покушај налажењем свих могућих комбинација	Број покушаја применом дихотомије
10	10	3
100	100	7
1 000	1 000	10
10 000	10 000	13

100 000	100 000	17
---------	---------	----

Поређење метода налажењем свих могућих комбинација и применом дихотомије (највећи број покушаја у оба метода). Код примене метода налажењем свих могућих комбинација, број покушаја у најгорем случају је « величина » броја (n), док је код дихотомије, број покушаја $\log_2 (n)$

Ако величина расте с фактором 10, онда је за прво метод потребно 10 пута више времена, док је код дихотомије то само 3 или 4 покушаја више.

Четврти покушај: наћи однос два члана код геометријског низа помоћу дихотомије (по паровима)

Наставник враћа ученике на почетни проблем, тј., налажење броја (између 1 и 2), што омогућује конструкцију геометријске скале (скале равномерног темепраментa(gamme tempérée)).

Напомиње да је за добијљње задовољавајућег резултата потребна прецизност са 5 цифара после запете..

Ученици убацују нову колону у табелу да би постепено могли да побољшају свој начин тражења те вредности применом метода дихотомије.

У доњој табели приказујемо само 5 првих покушаја, а потребно је 16 етапа, и последњи. Финалне фреквенције које је потребно наћи су назначене у табели (наводимо и погрешне покушаје са различитим фактором за тестирање, све док није нађена добра вредност која је наведена у колони 4 (означено плавом бојом); вредности фреквенција у колони 5 су добијене у од стране ученика у другом покушају):

	essai 5	...essai 16	essai 4	essai 3	essai 2	essai 1			
	1	1,03125	1,05946	1,0625	1,125	1,25	1,5	2	
			Fréquence (Hz) de l'essai n°16						
La2	1,000	1,000	1,000	220,000	1,000	1,000	1,000	1,000	
La#2	1,000	1,031	1,059	233,082	1,063	1,125	1,250	1,500	2,000
Si2	1,000	1,063	1,122	246,942	1,129	1,266	1,563	2,250	4,000
Do3	1,000	1,097	1,189	261,626	1,199	1,424	1,953	3,375	8,000
Do#3	1,000	1,131	1,260	277,183	1,274	1,602	2,441	5,063	16,000
Ré3	1,000	1,166	1,335	293,665	1,354	1,802	3,052	7,594	32,000
Ré#3	1,000	1,203	1,414	311,127	1,439	2,027	3,815	11,391	64,000
Mi3	1,000	1,240	1,498	329,628	1,529	2,281	4,768	17,086	128,000
Fa3	1,000	1,279	1,587	349,228	1,624	2,566	5,960	25,629	256,000
Fa#3	1,000	1,319	1,682	369,994	1,726	2,887	7,451	38,443	512,000
Sol3	1,000	1,360	1,782	391,995	1,834	3,247	9,313	57,665	1024,000
Sol#3	1,000	1,403	1,888	415,305	1,948	3,653	11,642	86,498	2048,000
La3	1,000	1,447	2,000	440,000	2,070	4,110	14,552	129,746	4096,000
La#3				466,164					
Si3				493,883					
Do4				523,251					
Do#4				554,365					
Ré4				587,330					
Ré#4				622,254					

Mi4	659,255
Fa4	698,456
Fa#4	739,989
Sol4	783,991
Sol#4	830,609
La4	880,000

Пет првих етапа тражења односа два члана геометријске прогресије, помоћу дихотомије, с прецизношћу од 1 стотихиљадитог дела. Финалне фреквенције су дате поред решења.

Одељење веома брзо закључује да је фреквенција било које ноте, с овом подлеом, увек двоструко већа фреквенције нижег тона октаве, као и да ће подела бити идентична и при употреби неке друге референце. То је карактеристика равномерно темперирана скала.

Научне напомене:

- Број који се, множењем самог себе дванаест пута, даје 2 је $2^{1/12}$. Вредност која се приближава броју 1,05946 биће сасвим довољна за овај ниво.
- Равномерно темперирана скала може бити добар увод за појам логаритма, уствари, присуство мултипликативног фактора, броја полустепена n измеђи две ноте фреквенција f_1 и f_2 је:

$$n = \frac{12}{\ln(2)} \ln \left(\frac{f_2}{f_1} \right)$$

- Равномерно темперирана скала је такође пример математичког појма, *групе*, који ће ученици срести тек на универзитету. Особина транспозиције као оператора (што је случај са мултипликацијом фреквенције), па ова скала илуструје групу $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.

Закључак

Ученици добијају скалу према којој подешавају своје синтисајзере. Ако су врло високо или врло ниско за њихов инструмент, ученици могу да сазнају да су само за фактор 2 близу жељене фреквенције. Могу да мере фреквенције пијанина у музичком кабинету помоћу метронома и тако верификују да ли је наштимован на равномерно темперирану скалу!

Продубљивање 1: програмирање дихотомије у *Scratch*

Одељење може да одлучи да програмира истраживање методом дихотомије у *Scratch*. Реализација таквог програма захтева више часова рада (јер је потребно да се усвоје појмови варијабли типа « листа » и « функција » што омогућује избегавање, између осталог, мнанипулације петљама уграђеним једне у друге).

Програмирање може да се реализује на 2 нивоа:

- Ниво 1: дихотомија се реализује « ручно », тј., ученици уносе вредност која се тестира (на њему је да, узме или не, средњу вредност), програмом се прорачунава скала и даје информација о резултату « врло мали » или « врло велики », у зависности од претходно одређене прецизности. Прецизност у доњем примеру је 1%.
- Ниво 2: дохотомија се рачуна аутоматски помоћу програма. Једини параметар који може да мења корисник је жељена прецизност.

Програм « ниво 1 » примењен на проблем равномерно темпериране скале.

The image shows a Scratch script for a binary search algorithm. The script is as follows:

```

када је кликнуто на
нека резултат буде 0
понављај док не апс од 2 * резултат < 0.01
  ако је резултат = 0 онда
    питај Који је коефицијент? и чекај
  у супротном
    ако је резултат < 2 онда
      питај Врло мало! Који је коефицијент? и чекај
    у супротном
      питај Врло велико! Који је коефицијент? и чекај
    прорачунај скалу_октаве
  изговори повежи повежи Браво и одговор и повежи дванаест пута дато и резултат
  
```

On the right side, there are three yellow sticky notes with the following text:

- тражимо коефицијент геометријске прогресије
- дефинишемо прецизност жељеног резултата
- корисник примењује дихотомију ручно

The image shows a Scratch script for calculating a 12-note scale. The script starts with a 'define function' block named 'прорачунај_скалу_1октаве'. Inside, it sets a variable 'скала' to 220, then sets 'результат' to 1. A loop repeats 12 times, where 'результат' is multiplied by 'одговор' and 'элемент 10 из скала' is multiplied by 'результат' and added to 'скала'. Finally, it says 'повежи одговор и повежи дванаест пута дато и резултат' for 2 seconds.

прорачн 12 нота скале према геометријској прогресији.

13-та нота је октава (La3). Тражимо да ова 13-та нота има двоструку фреквенцију прве (La2=220Hz)

Програм « ниво 2 » промењена на проблем равномерно темпериране скале.

```

when clicked on the green flag
  set minimum to 1
  set maximum to 2
  set middle to (minimum + maximum) / 2
  loop until abs(2 - result) < 0.01
    if middle < 2 then
      set maximum to middle
      set middle to (minimum + maximum) / 2
    else
      set minimum to middle
      set middle to (minimum + maximum) / 2
  end loop
  say Bravo and middle and дванаест пута and result for 12 secs
  define middle as (minimum + maximum) / 2

```

када је кликнуто на

нека минимум буде 1

нека максимум буде 2

прорачун_срдине

прорачун_скеле_1 октаве

понови abs од 2 - резултат < 0.01

ако је резултат < 2 онда

нека минимум буде средина

прорачун_срдине

у супротном

нека максимум буде средина

прорачун_срдине

прорачун_скеле_1 октаве

изговори повежи повежи Bravo и средина и повежи дванаест пута и резултат

дефиниши прорачун_срдине

нека средина буде $\frac{\text{минимум} + \text{максимум}}{2}$

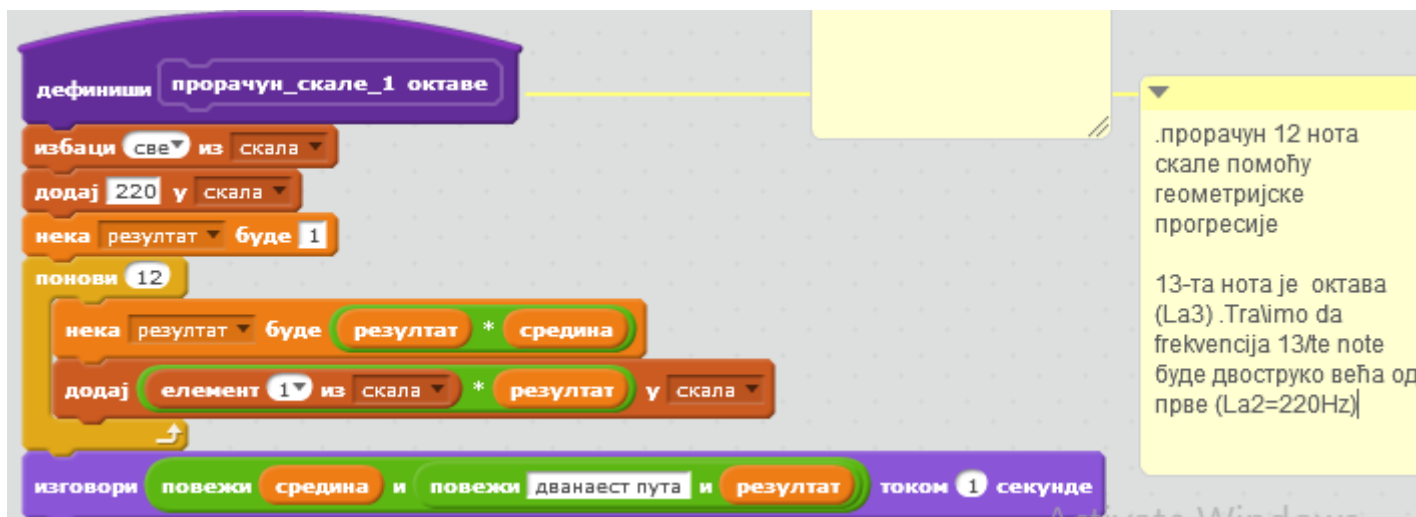
применом дихотомије
наћи количник
геометријске

тражени количник
геометријска

дефинишемо
прецизност жељеног
резултата

врло је мало, па
тражимо на другој
половини

врло је велико, па
тражимо на првој
половини



Продубљивање 2 : хроматска скала

Као што смо поменули у уводу постоји више скала па ученици могу изучавати *хроматску* скалу од 12 нота. (Могуће је и ограничити се на *питагорејску* скалу 7 нота, која је конструисана на потпуно истом принципу.)

Наставник даје сваком пару ученика [Радни лист-Д06](#). Предлаже ученицима да ураде корак по корак прорачуне Питагоре. Наставник, на табли, рачуна ручно разломке првих тражених нота (Sol1, Ré2, La2). Ученици затим изводе остатак прорачуна у Excel.

Прво питање се састоји у прорачуну циклуса квинти за дванаест нота.

Note	Fa0	Do1	Sol1	Ré2	La2	Mi3	Si3
Однос	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{27}{8}$	$\frac{81}{16}$	$\frac{243}{32}$
Фреквенција	43,5	65,8	97,8	146,7	220	330	495
Note	Fa#4	Do#5	Sol#5	Ré#6	La#6	Fa7	
Однос	$\frac{729}{64}$	$\frac{2187}{128}$	$\frac{6561}{256}$	$\frac{19683}{512}$	$\frac{59049}{1024}$	$\frac{177147}{2048}$	
Фреквенција	742,5	1113,7	1670,6	2506,0	3758,9	5638,4	

Све ове ноте су чујне (људско ухо је осетљиво на фреквенције од 16 до 20 000 Hz) на простору од осма октава ! Потребно је « редуковати » све ноте на октаву 1.

Note	Fa0	Do1	Do#1	Ré1	Ré#1	Mi1	Fa1
Однос	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{2187}{2048}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{19683}{16384}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{177147}{131072}$
Фреквенција	43,5	65,8	69,6	73,3	78,3	82,5	88,1
Note	Fa#1	Sol1	Sol#1	La1	La#1	Si1	
Однос	$\frac{729}{512}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{6561}{4096}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{59049}{32768}$	$\frac{243}{128}$	
Фреквенција	92,8	97,8	10,4	110	117,5	123,7	

Овде смо свесно оставили вредност за Fa0. Фреквенцију Fa1 можемо добити на два начина, било множењем Fa0 са 2 (што даје 86,91 Hz) било смањујући Fa7 у интервалу [1,2] делећи са $2^6=64$ (што даје 88,09 Hz). Постоји ипак проблем, јер циклус од дванаест квинити не пада потпуно на осам октава (јер степени од $3^9/2^9$ не могу дати умношке од 2). У пракси, обично рачунамо Fa1 у односу на Fa0, и не уводимо Fa1' изведено из Fa7, јер их ухо слабо разликује, па је потребно да се негде зауставимо.

Појављује се и други проблем истог реда, јер La#1 и Fa2 (односа 8/3, било 86,91 Hz) би требало да формирају квинту. Међутим њихов однос је:

$$\left(\frac{8}{3}\right) / \left(\frac{59049}{32768}\right) = \frac{262144}{177147} \approx 1,479 < \frac{3}{2}$$

Ако се ове две ноте свирају симултано добија се необична импресија попут неког звука аларма. Ова квинта (quinte du loup) је историјски проскрибована па се избегава њено коришћење у мелодијама сем ако не желимо да креирамо неки специјалан ефект..

Продубљење 3: природна скала

[Радни лист-Д07](#) пружа могућност поређења хроматске с природним скалама. Ученици запажају да су вредности добијених фреквенција код неких нота идентичне претходним а код других варирају.

Ноте	La3	La#3	Si3	Do4	Do#4	Ré4	Ré#4	Mi4	Fa4	Fa#4	Sol4	Sol#4	La4
Питагорејски однос	1,000	1,068	1,125	1,201	1,266	1,333	1,424	1,500	1,602	1,688	1,802	1,898	2,000
Скала La (Hz)	440,00	469,86	495,00	528,60	556,88	586,67	626,48	660,00	704,79	742,50	792,89	835,31	880,00
Однос zarlinien	1,000	1,067	1,125	1,200	1,250	1,333	1,440	1,500	1,600	1,667	1,800	1,875	2,000
Скала La (Hz)	440,00	469,33	495,00	528,00	550,00	586,67	633,60	660,00	704,00	733,33	792,00	825,00	880,00

Наставник предлаже ученицима да понове свој прорачун на скали дефинисаној у односу на Do4 фиксираниг на 521,48 Hz. То је скала *majeure*.

Ноте	Do4	Do#4	Ré4	Ré#4	Mi4	Fa4	Fa#4	Sol4	Sol#4	La4	La#4	Si4	Do5
Питагорејски однос	1,000	1,068	1,125	1,201	1,266	1,333	1,424	1,500	1,602	1,688	1,802	1,898	2,000
Скала Do (Hz)	521,5	556,87	586,67	626,48	660,00	695,31	742,50	782,22	835,31	880,00	939,72	990,00	1042,96
Однос zarlinien	1,000	1,042	1,125	1,200	1,250	1,333	1,389	1,500	1,563	1,667	1,778	1,875	2,000
Скала Do (Hz)	521,5	543,21	586,67	625,78	651,85	695,31	724,28	782,22	814,81	869,13	927,08	977,78	1042,96

Научна напомена:

Ученици запажају да формуле за две природне скале нису идентичне! Наведне формуле су одабране из мноштва опција. За разлику од темперираних или хроматских скала неке нехармонијске ноте се знатно разликују, на пример однос деветог полустепена. У *gamme majeure*, Sol# има однос 25/16 у односу на Do исто као tierce majeure од Mi, док La# има однос 8/5 исто као tierce mineure од Fa (у *gamme mineure*, однос дветог полустепена, Fa, је увек 8/5 као квинта од Do). Да би најчешће коришћени акорди *gamme naturelle majeure* звучали исправно, обично се на La# додаје однос Sol#. Gioseffo Zarlino је, настојећи да пружи могућност избора музичарима, конструисао *chembalo* са три типа дирки тако да могу разликовати ноте без предзнака, повисилице и снизилице!

Питагорејска скала се простире у итом распону фреквенција за Ré4, Mi4 et La4 (одмах се уочава да је Si4 двострука у односу на Si3). Прелаз (од La на Do или од Do на La) ће бити пријатан за ухо. *Природна скала у Do* не узима ниједну од претходних вредности (чак и тамо где су коефицијенти били идентични између *gamme mineure* et *gamme majeure*), та музика звучи веома необично ако покушавамо да је транспонујемо !

[Projet "Synthétiseur"](#) Extrait de "[1, 2, 3... codez !](#)",
[Editions Le Pommier, 2016-2017](#). Publié sous
licence [CC by-nc-nd 3.0](#)